

(全3の2)

3. 座標平面上に、放物線 $y = -x^2$ がある。この放物線上に、点 $A(a, -a^2)$, $B(a+p, -(a+p)^2)$ をとる ($p > 0$)。さらに、点 C を三角形 ABC が正三角形となるようにとる。ただし、頂点 C は辺 AB に対して反時計回りの位置にあるとする。

(1) 点 C の座標は $\left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}p, \sqrt{\frac{3}{4}}a + \sqrt{\frac{3}{4}}p + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $-a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}p(-\sqrt{\frac{3}{4}}a + \sqrt{\frac{3}{4}}p + \frac{\sqrt{3}}{2})$ である。

(2) $p = \sqrt{3}$ とする。 a がすべての実数をとるように変化するとき、点 C の軌跡は $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(3) a を負の定数とする。 p がすべての正の実数をとるように変化するとき、点 C の y 座標は $p = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} - a$ のとき、最大値は $\frac{(\sqrt{14} - \sqrt{3})^2}{3} - a^2$ とする。したがって、 a がすべての負の実数をとるように変化するとき、点 C の y 座標の最大値は $\frac{(\sqrt{14} - \sqrt{3})^2}{3} - a^2$ であり、そのとき $a = -\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$, $p = \sqrt{\frac{14}{3}}$ である。

4. A, B の2人でゲームをする。

・コインを投げて表が出たら A が1ポイント、裏が出たら B が1ポイント獲得する。

・これを繰り返して、先に3ポイント獲得した方が、1セットを得る。いずれかが1セットを得た時点で、それぞれのポイントともに0に戻る。

・何セットかを繰り返して、先に3セットを得た方がこのゲームの勝者となる。ゲームはその時点で終了する。

勝敗がつかまでに行われたすべてのセットにおいて、A が獲得したポイントの合計を p_a , B が獲得したポイントの合計を p_b とする。

(1) 1回のセットにおいて、コインを3回投げて A がそのセットを得る確率は $\frac{\square}{\square}$, コインを4回投げて A がそのセットを得る確率は $\frac{\square}{\square}$, コインを5回投げて A がそのセットを得る確率は $\frac{\square}{\square}$ である。1回のセットで A が獲得するポイント数の期待値は $\frac{\square}{\square}$ である。

(2) A が3セット, B が0セットを得て A がゲームの勝者となったとき, $p_a = 3$ となる条件付き確率は $\frac{\square}{\square}$ であり, $p_b = 6$ となる条件付き確率は $\frac{\square}{\square}$ である。

(3) A がゲームの勝者となり, $p_a = 9$, $p_b = 11$ となる確率は $\frac{\square}{\square}$ である。

(4) A がゲームの勝者となったとき, $p_a \geq p_b + 2$ となる条件付き確率は $\frac{\square}{\square}$ である。

2

(全3の1)

1. $AB = a$, $AC = b$ ($c > b$) である三角形 ABC がある。 $\angle A$ の2等分線と辺 BC の交点を D とし, $\angle DAC = \theta$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

ただし, $\square \sim \square$ には, 次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① b ② c ③ $b+c$ ④ $b-c$ ⑤ $c-b$ ⑥ bc

また, $\square$, $\square$ には, 次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① $\cos \theta$ ② $\cos^2 \theta$ ③ $\cos^3 \theta$ ④ $\cos^4 \theta$ ⑤ $\cos^5 \theta$

(1) $AD = \frac{2\square}{\square}$ である。

(2) AD を直径とする円 O を考える。円 O が辺 AB 上および AC 上でそれぞれ交点を E , F とする。三角形 AEF の面積を S とすると,

$\sqrt{\frac{\square}{2\square}} < \sin \theta < 1$ のときである。このとき, その交点をそれぞれ E , F とする。三角形 AEF の面積を S とすると,

$S = \left(\frac{2\square}{\square}\right)^2 \sin \theta$ である。

2. 1辺の長さが1である正六角形 $ABCDEF$ において、辺 AB を1:2に内分する点を G , 対角線 AC を $p:(1-p)$ に内分する点を P , 同じく AC を $q:(1-q)$ に内分する点を Q とする ($0 < p < q < 1$)。

(1) 直線 GP が辺 EF (端点を含む) と共有点をもつのは, $\frac{\square}{\square} \leq p \leq \frac{\square}{\square}$ のときである。また、直線 GQ が辺 DE (端点を含む) と共有点をもつのは, $\frac{\square}{\square} \leq q \leq \frac{\square}{\square}$ のときである。

(2) $\triangle GPQ$ の面積は $\frac{\sqrt{\square}}{\square}(q-p)$ である。

1

