

問題 1

等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y, z) を考える.

- (1) $0 < x \leq y \leq z$ のとき,
 - ① x の値をすべて求めよ.
 - ② 自然数の組 (x, y, z) の個数を求めよ.
- (2) (1) の条件を考えない場合,
 - ① 自然数の組 (x, y, z) のうち, x, y, z の 3 つの数字がすべて異なる組の個数を答えよ.
 - ② 自然数の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

問題 2

曲線 $C: y = -x^3 + 2kx$ 上の点 $P(p, -p^3 + 2kp)$ における接線 ℓ が, 点 P と異なる点 Q で曲線 C と交わり, 点 Q における接線が直線 ℓ と直交している. ただし, k は実数, p は 0 でない実数とする.

- (1) 以下の文中の空欄 ① ~ ④ に入る数式を p と k を用いて表せ.
 接線 ℓ の方程式は $y =$ ① $x +$ ② であり, 点 Q の座標は (③ , ④) である.
 (2) (1) のとき, k のとりうる値の範囲を求めよ.
 (3) $p = 1$ とし, 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた領域のうち $y \geq 0$ の部分の面積を S とする. 点 Q の y 座標が 0 以上のとき $S =$ ① であり, 負のとき $S =$ ② である. この空欄 ① と ② に入る数式を k を用いて表せ.

問題 3

n を自然数とする. 座標平面上において, 不等式

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \log_3 \frac{y}{x} \leq x \leq n$$

を満たす格子点 (x, y) (座標がともに整数である点) の個数を S_n とする.

- (1) 与えられた不等式を満たす格子点のうち, 直線 $x = k$ 上にある格子点の個数を k を用いて表せ. ただし, k は $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする.
- (2) S_n を求めよ.

問題 4

時刻 0 において, 2 つの動点が正四面体 $ABCD$ の頂点 A に位置している. これらの動点は独立に運動し, それぞれ 1 秒ごとに, 隣の頂点に等確率で移動していくとする. たとえば, ある時刻で点 D にいる動点は, その 1 秒後には点 A, B, C のいずれかに, それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する. この 2 つの動点が, 時刻 0 から n 秒後に同じ点にいる確率を p_n とする. ただし, n は自然数とする.

- (1) p_1, p_2 を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.
- (3) p_n を求めよ.