（全４の１）

1. （1） x, y, a, b を正の実数とする．

$a^x = b^y = \sqrt{ab}$ （$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$）

を満たしているとき，a, b の値によらず，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \boxed{ア}$ となる．また，$\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(4x + y)$ の最小値は $\boxed{イ}$ である．

よって，$4x + y$ は $(x, y) = \left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$ において最小値 $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ をとることがわかる．

（2） x, y, z, a, b, c を正の実数とする．

$a^x b^y = b^y c^z = c^z a^x = abc$ （$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ かつ $c \neq 1$）

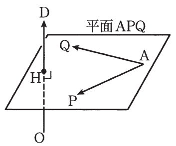
を満たしているとき，$x + 4y + z$ は $(x, y, z) = (\boxed{ケ}, \boxed{コ}, \boxed{サ})$ において最小値 $\boxed{シ}$ をとる．

2. 1辺の長さが1の正四面体 OABC があり，OB の中点を P，OC を 1：2 に内分する点を Q とする．また $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする．次の問いに答えよ．

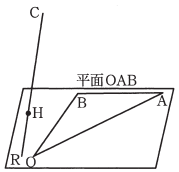
（1） $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{b} - \vec{a}$，$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\vec{c} - \vec{a}$ である．x, y, z を0でない実数とし，$\overrightarrow{OD} = x\vec{a} + y\overrightarrow{OP} + z\overrightarrow{OQ}$ とする．内積 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ であるとき $\dfrac{z}{x} = -\boxed{チ}$ である．このとき，さらに内積 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ であるとき $\dfrac{y}{x} = -\boxed{ツ}$ となる．

（2） 平面 APQ 上の点 H について OH は平面 APQ と垂直であるとする．

このとき，$\overrightarrow{OH} = -\dfrac{\boxed{テ}}{10}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ト}}{10}\vec{b} + \dfrac{\boxed{ナ}}{10}\vec{c}$ である．



さらに，直線 CH と平面 OAB の交点を R とすると $\overrightarrow{OR} = \dfrac{1}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{AB}$ となり，OR と AB は平行であることがわかる．



1

（全４の２）

3. （1） 3次関数 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 3$ を考える．$y = f(x)$ において，極値をとるグラフ上の2点を A，B とする．これらの2点をいずれも通る直線の方程式は $y = -\dfrac{\boxed{ヌ}}{2}x + \dfrac{\boxed{ネ}}{2}$ である．

（2） 4次関数 $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x$ について，以下の問いに答えよ．

（i） $g(x)$ を $g'(x)$ で割ると，商は $\dfrac{\boxed{ノ}}{4}x - \dfrac{\boxed{ハ}}{6}$，余りは $-\boxed{ヒ}x^2 + \boxed{フ}x + \boxed{ヘ}$ である．

（ii） $g(x)$ は $x = \boxed{ホ}$ において極大値 $\boxed{マ}$，$x = \dfrac{\boxed{ミ} \pm \sqrt{\boxed{ム}}}{2}$ において極小値 $\dfrac{\boxed{メ} \pm \boxed{モ}\sqrt{\boxed{ヤ}}}{2}$ をとる．ただし，複号同順である．

（iii） $y = g(x)$ において，極値をとるグラフ上の3点を P，Q，R とする．これらの3点をすべて通り，軸が y 軸に平行な放物線の方程式は $y = -\boxed{ユ}x^2 + \boxed{ヨ}x + \boxed{ラ}$ である．

2

4. 動物高校に通うウサギとクマの会話である．

ウサギ：従兄弟の子供が中学受験をするというので，問題集をやっていたんだ．

> 1より大きな数（小学生だから正の整数）があります．次の操作 T を考えます．
> **操作 T**：「数が2の倍数のときは2で割り，2の倍数でないときは1を足す．」
> この操作 T を繰り返すと，いつか1になります．初めて1になったら，そこでやめます．
> たとえば最初が5ならば，1を足して6になり，2で割ると3になり，次は1を足して4になり，次は2で割って2になり，次は2で割って1になります．これを次のようにかくことにします．
> $5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$
> では，
> $\boxed{\text{III}} \to \boxed{\text{II}} \to \boxed{\text{I}} \to 2 \to 1$
> となるとき，空欄にはどんな数が入るでしょうか？すべて答えなさい．

クマ：$\boxed{\text{I}}$ は4が入るね．T が「2で割るか，1を加える」だから，T の逆操作は「2倍するか，1を引く」で，$\boxed{\text{II}}$ は「$\boxed{\text{I}}$ の2倍，または $\boxed{\text{I}}$ から1を引いたもの」だから，「8または3」だね．

(1)　$\boxed{\text{III}}$ に入ることができる数は $\boxed{\text{リ}}$ 個ある．

クマ：ちょうど n 回で操作が終了する数はいくつあるんだろう．

ウサギ：塾で「n 回で，場合の数の問題で，すぐに求められないなら，漸化式を立てる」と習った．やってみよう．うーん，これ，一般項に無理数が出るパターンだ．無理数が出ないように問題を変更しよう．

操作 U：「1より大きな正の整数があるとき，それが c の倍数ならば，c で割る．それが c の倍数でなければ，$1, 2, 3, \cdots, c-1$ のうちの1つの数を加えて c の倍数になるようにする．」

これを繰り返して初めて1になったらやめる．一番初めの数を N として，n 回の操作でやめるような N が a_n 個あるとする．$c=2$ なら最初の問題と同じになるから，$a_1=1, a_2=1, a_3=2$ になるってわけだ．

クマ：塾の先生は「後の方でタイプ分けする」か「最初でタイプ分けする」と言っていたね．最初でタイプ分けしてみよう．n 回で操作が終了する a_n 個の N のうち，

N が c の倍数のものは『1回目に c で割る』から，あと $n-1$ 回で終了するので，a_{n-1} 個あるね．

N が c の倍数でないものは，

『N が c で割って余りが $c-1$ なら，1回目に1を加えて c の倍数にして（これで1回の操作），次に c で割る（これが2回目の操作）』，

または『1回目に2を加えて c の倍数にして，次に c で割る』，$\cdots$，

または『1回目に $c-1$ を加えて c の倍数にして，次に c で割る』，

というタイプがある．これらは，今の時点で2回操作しているから，あと $\boxed{\text{ル}}$ 回で終了するね．

ウサギ：だから $n \geqq 3$ として $a_n = a_{n-1} + \boxed{\text{レ}} \times a_{\boxed{\text{ロ}}}$ ……Ⓐ が成り立つね．

(2)　$\boxed{\text{ル}}$，$\boxed{\text{レ}}$，$\boxed{\text{ロ}}$ に次の選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ．同じ番号を何回選んでもよい．

①　$n-1$　　②　$n-2$　　③　n　　④　$c-1$　　⑤　$c+1$　　⑥　c

(3)　Ⓐから得られる方程式 $x^2 - x - \boxed{\text{レ}} = 0$ が整数解をもつのは，0以上の整数 k を用いて $\boxed{\text{ワ}}c - \boxed{\text{ヲ}} = (2k+1)^2$ の形でかけるときである．このとき，$c = k^2 + k + \boxed{\text{ン}}$ となる．特に，この $k=2$ のときは，$a_2 = 6$，$a_n = \dfrac{1}{\boxed{\text{あ}}}\left(\boxed{\text{い}} \cdot \boxed{\text{う}}^{\,n-1} - \boxed{\text{え}} \cdot \left(-\boxed{\text{お}}\right)^{n-1}\right)$ となる．

5. xyz 空間において，半径1の球 D の中心が xy 平面上の4つの線分

$$\begin{cases} y=0 & (-5 \leqq x \leqq 5) \\ x=0 & (-5 \leqq y \leqq 5) \\ y=x & (-5 \leqq x \leqq 5) \\ y=-x & (-5 \leqq x \leqq 5) \end{cases}$$

上を動くとする．このとき，球 D の通過する部分を W とおく．

(1)　平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ における，W の断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \boxed{\text{か}}\left\{10\left(\boxed{\text{き}} + \sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)\sqrt{1-t^2} - \left(\boxed{\text{け}} + \boxed{\text{こ}}\sqrt{\boxed{\text{く}}} - \pi\right)(1-t^2)\right\}$$

である．

(2)　W の体積を V とおくと，

$$V = \left(\frac{\boxed{\text{さし}}}{3} + 20\sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)\pi - \frac{\boxed{\text{すせ}}}{3}\left(\boxed{\text{そ}} + \sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)$$

である．