

(全 2 の 2)

4. あるイベント会場に司会者の S さん, チーム a の A, B, C, チーム d の D, E, F の合計 7 人がいる。チーム a の 3 人とチーム d の 3 人は面識はない。A, B, C の各人は D, E, F の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ。D, E, F の各人は A, B, C の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ。お互いが指定した者同士がいれば、『新たな友達』になる。たとえば A さんが D さんを指定し, D さんが A さんを指定すれば A さんと D さんは『新たな友達』になる。ただし, 誰が誰を指定したかは S さんの前にあるパネルに同時に表示され, S さんだけに分かるとする。S さんの発言は常に正しいとする。

(1) 『新たな友達』が 3 組できる確率は 。『新たな友達』が 2 組できる確率は である。

(2) S さんが言った。

「A さん, ある人と『新たな友達』になりましたよ。」

このとき, B さんが誰かと『新たな友達』になる条件付き確率は である。

(3) S さんが言った。

「A さん, ある人と『新たな友達』になりましたよ, D さん, ある人と『新たな友達』になりましたよ。」

このとき, A さんと D さんが『新たな友達』である条件付き確率は である。

5. 実数 p に対して, 2 次方程式

$$x^2 - (2p + 1)x + 2(p^2 - p - 1) = 0$$

の異なる 2 つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。

(1) 解と係数の関係より, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を p を用いて表すと

$$\alpha + \beta = \text{ア}, \alpha\beta = \text{イ}$$

である。この 2 式から p を消去して得られる α, β に関する関係式を $\alpha\beta$ 平面に図示すると, 中心の座標が , 半径が の円となる。

以下では, p は $-\frac{1}{2} \leq p \leq 3$ の範囲を動くとする。

(2) α のとりうる値の範囲は である。また, β のとりうる値の範囲は である。

(3) $2\alpha - \beta$ のとりうる値の範囲は である。

(全 2 の 1)

※空欄に適切な解を入れよ。複数の解がある場合には「(コンマ)」で区切ってすべての解を記入すること。

1. 数列 $\{a_n\}$ に対して,

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$$

と定める。さらに, 自然数 n に対して

$$T_n = n^2(3n - a_n + 3) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとき, 以下の問いに答えよ。

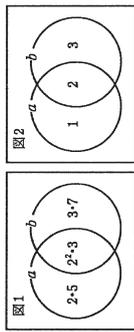
(1) $a_1 = \text{ア}, a_2 = \text{イ}$ である。

(2) T_n, T_{n-1} の間に成り立つ関係式を用いて a_n を消去して考えよ。 $T_n = \text{ウ}$ である。

(3) $a_n = \text{エ}$ である。

2. 以下, a, b は自然数とし, a, b の最小公倍数を L , 最大公約数を G とする。

たとえば, a, b を素因数分解し, $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ のとき, a, b の最大公約数は $2^2 \cdot 3$ で, a, b は両方ともこれを公約数にもつ。これを図 1 の ① において, それ以外に a がもつ $2 \cdot 5$ を (① において, b がもつ $3 \cdot 7$ を ②) におくと考える。すると, $a = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3), b = (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ で, $L = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ が成り立つ。 $a = 2, b = 6$ のときは図 2 のように考え, (① には入るべき素因数がないから, そこには 1 を記入することにする。必要があれば, この考え方をヒントにして, 次の問いに答えよ。



(1) 2310 を素因数分解すると となる。次に, $L = 2310$ になるような a, b について (a, b) は 通りある。ただし, たとえば $(a, b) = (1, 2310)$ と $(a, b) = (2310, 1)$ は異なる組であると考え, この区別は以下の段間でも適用する。

(2) x, y, z は 0 以上の整数で,

$$x + y + z = 4$$

を満たすとき, (x, y, z) は 通りある。ただし, たとえば $(x, y, z) = (4, 0, 0), (0, 0, 4)$ は異なる組である。

(3) $L = 1680$ になるような a, b について (a, b) は 通りある。

3. θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ を動く実数であり, a は実数の定数である。

(1) $x = -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とする。 x のとる値の範囲は である。また

$$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

を x を用いて表すと である。

(2) 曲線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = a(2x - 1)$ が $x < 0$ で接するとき $a = \text{ウ}$ であり, 接点の x 座標は である。

(3) $f(\theta) = -\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2a(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) + a + 4$

とする。方程式 $f(\theta) = 0$ の解の個数を N とする。 $N \geq 1$ になる a の範囲は である。最大の N は $N = \text{カ}$ であり, そのときの a の値の範囲は である。