医学科 後期一般選抜入試問題 3月8日 実施 数学

（全２の１）

1. 次の問いに答えよ。

(1) a は実数とする。x の２次方程式

$$x^2-2ax+2a^2-6a+1=0$$

が実数解をもつとき，判別式を利用して a のとる値の範囲は

$$\boxed{ア}-\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}} \leqq a \leqq \boxed{ア}+\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$$

である。

(2) 実数 a を変化させたときに，(1)の実数解 x のとる値の範囲を求めると $-\boxed{エ} \leqq x \leqq \boxed{オ}$ となる。

(3) a，b は異なる実数で，２つの２次方程式

$$x^2-2ax+2a^2-6a+1=0,$$
$$x^2-2bx+2b^2-6b+1=0$$

が共通解をもつとき，その共通解を c として，

$$a+b=c+\boxed{カ},\quad ab=\frac{c^2+\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

となる。$d=|a|+|b|+|c|$ とおく。c を変化させるとき，d の値の範囲は $\boxed{ケ} \leqq d < \boxed{コサ}$ である。

2. $OA=1$，$OB=1$，$\angle AOB=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たす三角形 OAB があり，OA の中点を M，OB を１：２に内分する点を N として，２本の線分 AN，BM の交点を P とする。

(1) $AP:PN=\boxed{シ}:\boxed{ス}$ かつ $OP=\dfrac{1}{\boxed{セ}}\sqrt{\boxed{ソ}+\boxed{タ}\cos\theta}$ である。

(2) $\alpha=\lim\limits_{\theta\to+0} OP$ とすると，$\alpha=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ であり，$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\alpha-OP}{\theta^2}=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$ である。

3. xy 平面の原点を O とする。O から x 軸の正方向に１だけ進んだ点 $(1,0)$ を P_1 とする。そこから進行方向を反時計回りに $120°$ 変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だけ進んだ点を P_2 とする。さらに進行方向を反時計回りに $120°$ 変え，$\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_3 とする。同様に，P_4，P_5，…，P_n を $120°$ ずつ反時計回りに進行方向を変え，進む長さを前回の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍にして得られる点とするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_2 の座標は $\left(\boxed{ニ}-\dfrac{\sqrt{\boxed{ヌ}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{4}\right)$，$P_3$ の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ノ}-\sqrt{\boxed{ハ}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{ヒ}}-\sqrt{\boxed{フ}}}{4}\right)$ である。

(2) 点 P_n は n を大きくすると，ある点 P_∞ に近づく。P_∞ の座標は

$$\left(\frac{\boxed{ヘホ}-\sqrt{\boxed{マ}}}{14},\ \frac{\boxed{ミ}\sqrt{\boxed{ム}}-\boxed{メ}\sqrt{\boxed{モ}}}{14}\right)$$ である。

(3) 三角形 $P_nP_{2n}P_{3n}$ が直角三角形となるのは，$n=\boxed{ヤ}$ のときである。

1

（全２の２）

4. n を自然数とする。n 以下の自然数のうち，n と共通な素因数がちょうど１つとなるものの個数を $E(n)$ と表すこととする。

例えば，12以下の自然数で12と共通な素因数がちょうど１つとなるものは２，３，４，８，９，10の６個であるから，$E(12)=6$ となる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $E(2025)$ を考える。2025以下の自然数のうち３の倍数は $\boxed{ユヨラ}$ 個，５の倍数は $\boxed{リルレ}$ 個，15の倍数は $\boxed{ロワヲ}$ 個あり，$2025=3^4\cdot5^2$ と表せることから，$E(2025)=\boxed{ンあい}$ となる。

(2) p を奇数の素数とし，a，b を自然数とする。

$n=2^ap^b$ とすると，n 以下の自然数のうち２の倍数は $2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}}$ 個，p の倍数は $2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}}$ 個，$2p$ の倍数は $2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$ 個あるから，

$$E(n)=2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}}+2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}}-2\cdot2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$$

となる。したがって，$\dfrac{E(n)}{n}$ は p の値によらず，一定値 $\dfrac{\boxed{け}}{\boxed{こ}}$ である。

ただし，$\boxed{う}$ ～ $\boxed{く}$ は次の選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① $a-1$　② a　③ $a+1$　④ $b-1$　⑤ b　⑥ $b+1$

(3) q，r を２つの異なる奇数の素数とし，c，d を自然数とする。

$n=q^cr^d$ とするとき，$\dfrac{E(n)}{n}$ のとりうる値のうち４番目に大きい値は $\dfrac{\boxed{さし}}{\boxed{すせ}}$ である。

5. $f(x)=x^3-2x$ とする。

(1) $p\neq0$ のときは，曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $P(p,\ f(p))$ における接線 l が C と再び交わる点を $Q(q,\ f(q))$ とする。ただし $p=0$ のときは $Q=P$ とする。$p=0$ のときを含めて $q=-\boxed{そ}p$ となる。PQ を $t:(1-t)$ に分ける点を $R(x,\ y)$ とすると，

$$x=(1-t)p+tq,\quad y=(1-t)f(p)+tf(q)$$

が成り立つ。$0\leqq t\leqq1$ のときは内分，$t<0$ または $t>1$ のときは外分である。

t を定数として p を実数全体で動かしたとき，R は直線または曲線を描き，

$t=\dfrac{\boxed{た}}{\boxed{ち}}$ のときは直線 $x=\boxed{つ}$ を描く。

$t=\dfrac{\boxed{て}}{\boxed{と}}$ のときは直線 $y=-\boxed{な}x$ を描く。

これら以外のときは $y=ax^3-\boxed{に}x$ ……Ⓐ

の形の３次関数のグラフを描く。

(2) $g(t)=\dfrac{1-9t}{(1-3t)^3}$ とする。$g'(t)=-\dfrac{\boxed{ぬね}t}{(1-3t)^4}$ である。

(3) (1)の曲線Ⓐを与えるような実数 t が３つ存在するのは a が $\boxed{の}<a<\boxed{は}$ のときである。

2